BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

И.Г.МИРЗОЕВА

Институт Прикладной Математики БГУ

В работе рассматриваются задачи оптимального управления с дискретным временем запаздывающего типа, с переменной структурой. В негладком случае получено необходимое условие оптимальности для дискретных систем с переменной структурой.

Среди разнообразных задач оптимального управления особое место занимают задачи управления дискретными системами, с переменной структурой, описываемые различными разностными уравнениями. Такие задачи, с непрерывным и дискретным временем, рассмотрены многими авторами (см. [2], где имеются ссылки на другие работы).

Пусть $X, Y, V_t, t=\overline{0,m-1}$ банаховы пространства, $f_t : X \times X \times V_t \to X$ при $t=\overline{0,k-1}$, $g_t : Y \times Y \times V_t \to Y$ при $t=\overline{k,m-1}$, $U_t \subset V_t, t=\overline{0,m-1}$. Предположим, что состояние объекта характеризуется разностным уравнением:

$$
\begin{aligned}
& x_{t+1} = f_t(x_{t-\Delta}, x_t, u_t), t = 0,\dots,k-1 \\
& x_t = c(t) \text{ при } t = -\Delta, -\Delta+1,\dots,-1,0,\ u_t \in U_t \\
& y_{t+1} = g_t(y_{t-h}, y_t, u_t), t = k, k+1,\dots,m-1 \\
& y_t = G(x_t) \text{ при } t = k-h, k-h+1,\dots,k, u_t \in U_t \\
& y_m \in C,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $c(t) \in X$ при $t = -\Delta, -\Delta+1,\dots,-1,0$, $C \subset Y, G : X \to Y$ отображение.

Под траекторией $\{x_t, y_v\}$ дискретного включения (1) будем понимать процесс $x_t, t = 1,\dots,k-1,k, y_v, v = k+1,\dots,m$, для которого выполнено (1).

Предположим, что $\Delta < k-1,\ h < \min\{k-1, m-1\},\ \varphi_t : X \to R, t=\overline{1,k}$, $\psi_t : Y \to R, t = \overline{k+1,m}$. Обозначим $x = (x_1,\dots,x_k),\quad y = (y_{k+1},\dots,y_m)$.

Рассмотрим задачу минимизации функции

$$F(x,y) = \sum_{t=1}^{k} \varphi_t(x_t) + \sum_{t=k+1}^{m} \psi_t(y_t) \tag{2}$$

на траекториях дискретного уравнения (1). Множество решений задачи (1) обозначим через D. Обозначим $a_t(x_1,x_2)=f_t(x_1,x_2,U_t), b_t(y_1,y_2)=g_t(y_1,y_2,U_t)$. Рассмотрим дискретные включения запаздывающего типа

$$
\begin{aligned}
&x_{t+1}\in a_t(x_{t-\Delta},x_t), t=0,\ldots,k-1\\
&x_t=c(t) \text{ при } t=-\Delta,-\Delta+1,\ldots,-1,0\\
&y_{t+1}\in b_t(y_{t-h},y_t), t=k,k+1,\ldots,m-1\\
&y_t=G(x_t) \text{ при } t=k-h,k-h+1,\ldots,k, y_m\in C.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

Ясно, что множество решений задачи (3) совпадает с множеством D. Траектория $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})=(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1},\ldots,\bar{y}_m)$ называется оптимальной, если $F(\bar{x},\bar{y})\le F(x,y)$ при $(x,y)\in D$. Ясно, что задача (1), (2) эквивалентна задаче (3),(2). Набор $\{(\bar{u}_t,\bar{x}_t),(\bar{u}_\tau,\bar{y}_\tau): : t=\overline{1,k}, \tau=\overline{k+1,m}\}$ решений системы (1), минимизирующий функционал (2) на решениях системы (1) называется оптимальным решением задачи (1), (2).

Следствие 1. Пусть $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$ является оптимальным решением задачи (1), (2), $I_{gra_t(c(-\Delta+t),\cdot)}(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $t=\overline{1,\Delta}$, $I_{gra_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $\overline{\Delta+1,k-1}$, $I_{grb_k(G(\cdot),G(\cdot))}(\bar{x}_{k-h},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1})$, $I_{grb_t(G(\cdot),\cdot)}(\bar{x}_{t-h},\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$ при $t=\overline{k+1,k+h}$, $I_{grb_t}(\bar{y}_{t-h},\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$ при $t=\overline{k+h+1,m-1}$ и $I_C(\bar{y}_m)$ непустые, функция $\varphi_t(\cdot), t=\overline{1,k}$, удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{x}_t$, функция $\psi_t(\cdot), t=\overline{k+1,m}$, удовлетворяет условию Липшица в окрестности $\bar{y}_t$. Тогда существуют $x_{t0}^*\in\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{1,k}$, $x_{t0}^{*}\in\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{k+1,m}$, $x_1^{**}(0)\in N_{a_0(c(-\Delta),c(0))}(\bar{x}_1)$, $(x_t^{**}(t),x_{t+1}^{*}(t))\in N_{gra_t(c(-\Delta+t),\cdot)}(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $t=\overline{1,\Delta}$, $(x_{t-\Delta}^{*}(t),x_t^{**}(t),x_{t+1}^{*}(t))\in N_{gra_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$, $(x_{k-h}^{*}(k),x_k^{*}(k),y_{k+1}^{*}(k))\in N_{gr\,b_k(G(\cdot),G(\cdot))}(\bar{x}_{k-h},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1})$, $(x_{k+t-h}^{*}(k+t),y_{k+t}^{*}(k+t),\ y_{k+t+1}^{**}(k+t))\in N_{gr\,b_{k+t}(G(\cdot),\cdot)}(\bar{x}_{k+t-h},\bar{y}_{k+t},\bar{y}_{k+t+1})$ при $t=\overline{1,h}$, $(y_{k+t}^{*}(k+h+t),y_{k+h+t}^{*}(k+h+t),\ y_{k+h+t+1}^{**}(k+h+t))\in N_{grb_{k+h+t}}(\bar{y}_{k+t},\bar{y}_{k+h+t},\bar{y}_{k+h+t+1})$ при $t=\overline{1,m-1-k-h}$, $y_m^{*}(m)\in N_C(\bar{y}_m)$ и число λ равное нулю или -1 такие, что в случае $h=\Delta$ выполняются соотношения: $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(\Delta+t)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{1,k}$; $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)+\ y_t^*(\Delta+t)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$, при $t=\overline{k+1,m-h-1}$, $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{m-h,m}$; в случае $h<\Delta$ выполняются соотношения: $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(\Delta+t)\in\ \lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{1,k-1-\Delta}$, $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{k-\Delta,k-\Delta+h-1}$, $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(t+\Delta)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{k-\Delta+h,k}$, $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)+\ y_t^*(t+1)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{k+1,m-1-h}$, $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{m-h,m}$; в случае $h>\Delta$ выполняются соотношения: $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(\Delta+t)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$

при $t=\overline{1,k-h-1}$, $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(t+\Delta)+x_t^*(t+h)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{k-h,k-1-\Delta}$, $x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(t+h)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$ при $t=\overline{k-\Delta,k}$, $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)+y_t^*(t+h)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{k+1,m-1-h}$; $y_t^*(t-1)+y_t^*(t)\in$ $\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$ при $t=\overline{m-h,m}$.

Если $h=\Delta$, то по следствию1 выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&x_t^*(t-1)+x_t^*(t)+x_t^*(\Delta+t)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t) \text{ при } t=\overline{1,k}\ ,\\
&y_t^*(t-1)+y_t^*(t)+y_t^*(t+\Delta)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t) \text{ при } t=\overline{k+1,m-\Delta-1}\,,\\
&y_t^*(t-1)+y_t^*(t)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t) \text{ при } t=\overline{m-\Delta,m}\ .
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Покажем, что при некоторых предположениях, необходимые условия, полученные в следствии 1 можно написать в виде принципа максимума.

Пусть Z банахово пространство, $E\subset Z$. Контингентный конус (см. [1]) к множеству E в точке $\bar{z}\in E$ обозначим $K_E(\bar{z})$. Если $T_E(\bar{z})=K_E(\bar{z})$, то множество E называется регулярной в точке $\bar{z}$.

Пусть $t=\overline{\Delta+1,k-1}$. Положим

$$S_{a_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t;x^*)=\sup\{\langle x^*,x\rangle : x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)\},$$

$$a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,x^*)=\{x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t):\langle x^*,x\rangle=S_{a_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t;x^*)\}$$

при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$. Предположим, что gra_t регулярный в точке $(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$ и пусть $a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)$ выпуклое множество. Так как $(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)\times a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)\subset gr\,a_t$, то по предложениям 7.6.1 и 7.1.5 [4] имеем, что

$$\{\lambda(0,x-\bar{x}_{t+1}):x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t),\lambda\ge 0\}\subset T_{gr\,a_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1}).$$

Так как $(x_{t-\Delta}^*(t),x_t^*(t),x_{t+1}^*(t))\in N_{gr\,a_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$, то $\langle(x_{t-\Delta}^*(t),x_t^*(t),x_{t+1}^*(t)),\ (x_{t-\Delta},x_t,x_{t+1})\rangle\le 0$ при $(x_{t-\Delta},x_t,x_{t+1})\in T_{gr\,a_t}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$. Поэтому $\langle x_{t+1}^*(t),x-\bar{x}_{t+1}\rangle\le 0$ при $x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)$, т.е. $\langle x_{t+1}^*(t),x\rangle\le\langle x_{t+1}^*(t),\bar{x}_{t+1}\rangle$ при $x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)$. Отсюда вытекает, что

$$\sup\{\langle x_{t+1}^*(t),x\rangle : x\in a_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t)\}=\langle x_{t+1}^*(t),\bar{x}_{t+1}\rangle$$

при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$. Поэтому

$$\sup\{\langle x_{t+1}^*(t),f_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,u_t)\rangle : u_t\in U_t\}=\langle x_{t+1}^*(t),f(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{u}_t)\rangle\,.$$

Обозначим

$$H_t(x_{t-\Delta},x_t,u_t,x_{t+1}^*(t))=\langle x_{t+1}^*(t),f_t(x_{t-\Delta},x_t,u_t)\rangle\,.$$

Тогда $\sup\{H_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,u_t,x_{t+1}^*(t)):u_t\in U_t\}=H_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{u}_t,x_{t+1}^*(t))$ при $t=\overline{\Delta+1,k-1}$.

Пусть f_t дифференцируема по $(x_{t-\Delta},x_t)$. Тогда из [4] вытекает, что $(v_1,v_2)\in T_{gr\,f_t(\,\cdot\,,\bar{u}_t)}(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ тогда и только тогда, когда $v_2=\nabla_x f_t(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{u}_t)v_1$. Поэтому

$$\langle \left(x^*_{t-\Delta}(t), x^*_t(t)\right), v_1\rangle = \langle -x^*_{t+1}(t), \nabla_x f_t(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{x}_t, \bar{u}_t) v_1\rangle$$

при $v_1 \in X^2$. Если $X = R^n$, то отсюда вытекает, что

$$\left(x^*_{t-\Delta}(t), x^*_t(t)\right) = -\nabla_x H_t\left(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{x}_t, \bar{u}_t, x^*_{t+1}(t)\right)$$

при $t = \overline{\Delta+1, k-1}$.

Пусть $t = \overline{1,\Delta}$. Предположим, что $gr\, a_t(c(-\Delta+t),\cdot)$ регулярный в точке $(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ при $t = \overline{1,\Delta}$ и пусть $a_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t)$ выпуклое множество. Так как $\bar{x}_t \times a_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t) \subset gr\, a_t(c(-\Delta+t),\cdot)$, то по предложениям 7.6.1 и 7.1.5 [4] имеем, что

$$\{\lambda(0, x - \bar{x}_{t+1}) : x \in a_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t), \lambda \geq 0\} \subset T_{gr\, a_t(c(-\Delta+t),\cdot)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1}).$$

Так как $\left(x^*_t(t), x^*_{t+1}(t)\right) \in N_{gr\, a_t(c(-\Delta+t),\cdot)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ при $t = \overline{1,\Delta}$, то $\langle \left(x^*_t(t), x^*_{t+1}(t)\right), (x_t, x_{t+1})\rangle \leq 0$ при $(x_t, x_{t+1}) \in T_{gr\, a_t(c(-\Delta+t),\cdot)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$. Поэтому $\langle x^*_{t+1}(t), x - \bar{x}_{t+1}\rangle \leq 0$ при $x \in a_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t)$. Отсюда вытекает, что

$$\sup\{\langle x^*_{t+1}(t), x\rangle : x \in a_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t)\} = \langle x^*_{t+1}(t), \bar{x}_{t+1}\rangle$$

при $t = \overline{1,\Delta}$. Поэтому

$$\sup\{\langle x^*_{t+1}(t), f_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, u_t)\rangle : u_t \in U_t\} = \langle x^*_{t+1}(t), f(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t)\rangle.$$

Обозначив

$$H_t\left(c(-\Delta+t), x_t, u_t, x^*_{t+1}(t)\right) = \langle x^*_{t+1}(t), f_t(c(-\Delta+t), x_t, u_t)\rangle$$

имеем, что

$$\sup\{H_t\left(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, u_t, x^*_{t+1}(t)\right) : u_t \in U_t\} = H_t\left(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t, x^*_{t+1}(t)\right)$$

при $t = \overline{1,\Delta}$.

Пусть f_t дифференцируема по x_t. Тогда из [4, с.402], вытекает, что $(v_1, v_2) \in T_{gr\, f_t(c(-\Delta+t),\cdot,\bar{u}_t)}(\bar{x}_t, \bar{x}_{t+1})$ тогда и только тогда, когда $v_2 = \nabla_x f_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t) v_1$.

Поэтому

$$\langle x^*_t(t), v_1\rangle = \langle -x^*_{t+1}(t), \nabla_x f_t(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t) v_1\rangle$$

при $v_1 \in X$. Если $X = R^n$, то отсюда вытекает, что

$$x^*_t(t) = -\nabla_x H_t\left(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t, x^*_{t+1}(t)\right)$$

при $t = \overline{1,\Delta}$.

Предположим, что $gr\, b_k(G(\cdot), G(\cdot))$ регулярный в точке $(\bar{x}_{k-\Delta}, \bar{x}_k, \bar{y}_{k+1})$ и пусть $b_k(G(\bar{x}_{k-h}), G(\bar{x}_k))$ выпуклое множество. Так как

$(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k)\times b_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k))\subset gr\,b_k(G(\cdot),G(\cdot))$, то по предложениям 7.6.1 и 7.1.5 [4] имеем, что

$$\{\ \lambda(0, y-\bar{y}_{k+1}) : y\in b_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k)), \lambda\ge 0\ \}\subset T_{gr\,b_k(G(\cdot),G(\cdot))}(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1}).$$

Так как $\left(x^*_{k-\Delta}(k),x^*_k(k),y^*_{k+1}(k)\right)\in N_{gr b_k(G(\cdot),G(\cdot))}(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1})$, то $\langle\left(x^*_{k-\Delta}(k),x^*_k(k),\right.$ $\left.y^*_{k+1}(k)\right)$, $(x_{k-\Delta},x_k,y_{k+1})\rangle\le 0$ при $(x_{k-\Delta},x_k,y_{k+1})\in T_{gr b_k(G(\cdot),G(\cdot))}(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1})$. Поэтому $\langle y^*_{k+1}(k),\ y-\bar{y}_{k+1}\rangle\le 0$ при $y\in b_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k))$. Отсюда вытекает, что

$$\sup\{\langle y^*_{k+1}(k),y\rangle : y\in b_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k))\}=\langle y^*_{k+1}(k),\bar{y}_{k+1}\rangle .$$

Поэтому

$$\sup\{\langle y^*_{k+1}(k), g_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),u_k)\rangle : u_k\in U_k\}=\langle y^*_{k+1}(k), g_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\bar{u}_k)\rangle .$$

Обозначив при $t=\overline{k,m-1}$

$$H_t\left(y_{t-\Delta},y_t,u_t,y^*_{t+1}(t)\right)=\langle y^*_{t+1}(t),g_t(y_{t-\Delta},y_t,u_t)\rangle$$

имеем, что

$$\sup\{H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),u_k,y^*_{k+1}(k)\right): u_k\in U_k\}=H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\bar{u}_k,y^*_{k+1}(k)\right).$$

Пусть g_k дифференцируема по Фреше относительно (y_{k-h},y_k) и G дифференцируема по Фреше. Тогда из [4, с. 402], вытекает, что $(v_1,v_2)\in T_{gr\,g_k(\cdot,\bar{u}_k)}(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k,\bar{y}_{k+1})$ тогда и только тогда, когда $v_2=g'_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\bar{u}_k)\circ(G'(\bar{x}_{k-\Delta}),G'(\bar{x}_k))v_1$. Поэтому

$$\langle\left(x^*_{k-\Delta}(k),x^*_k(k)\right),v_1\rangle=\langle -y^*_{k+1}(k),g'_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\bar{u}_k)\circ(G'(\bar{x}_{k-\Delta}),G'(\bar{x}_k))v_1\rangle$$

при $v_1\in X^2$. Если $X=R^n$, то отсюда вытекает, что

$$\left(x^*_{k-\Delta}(k),x^*_k(k)\right)=-\left(H_k\left(\cdot,\bar{u}_k,y^*_{k+1}(k)\right)\circ(G,G)\right)'(\bar{x}_{k-\Delta},\bar{x}_k)\ .$$

Предположим, что $gr\,b_t(G(\cdot),\cdot)$ регулярный в точке $(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$, $b_t(G(\bar{x}_{t-\Delta}),\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$ выпуклое множество при $t=\overline{k+1,k+\Delta}$, $gr\,b_t$ регулярный в точке $(\bar{y}_{t-\Delta},\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$ и $b_t(\bar{y}_{t-\Delta},\bar{y}_t,\bar{y}_{t+1})$ выпуклое множество при $t=\overline{k+\Delta+1,m-1}$, g_t дифференцируема по $(y_{t-\Delta},y_t)$ при $t=\overline{k,m}$ и G дифференцируема по Фреше.

Аналогично при $t=\overline{1,\Delta}$ имеем, что

$$\sup\{H_{k+t}\left(G(\bar{x}_{k-\Delta+t}),\bar{y}_{k+t},u_{k+t},y^*_{k+t+1}(k+t)\right): u_{k+t}\in U_{k+t}\}=H_{k+t}(G(\bar{x}_{k-\Delta+t}),\bar{y}_{k+t},$$

$\left.\bar{u}_{k+t},y^*_{k+t+1}(k+t)\right)$, если $X=R^n$, $Y=R^m$, то $\left(x^*_{k+t-\Delta}(k+t),y^*_{k+t}(k+t)\right)=$

$$=-\left(H_{k+t}\left(\cdot,\bar{u}_{k+t},y^*_{k+t+1}(k+t)\right)\circ(G,I)\right)'(\bar{x}_{k-\Delta+t},\bar{y}_{k+t}).$$

При $t=\overline{\Delta+1,m-1}$ имеем, что

$$\sup\left\{H_{k+t}\left(\bar{y}_{k-\Delta+t},\bar{y}_{k+t},u_{k+t},y^*_{k+t+1}(k+t)\right):u_{k+t}\in U_{k+t}\right\}=H_{k+t}\left(\bar{y}_{k-\Delta+t},\bar{y}_{k+t},\bar{u}_{k+t},\right.$$
$$\left.y^*_{k+t+1}(k+t)\right).$$

Если $Y=R^m$, то имеем, что

$$\left(y^*_{k+t-\Delta}(k+t),y^*_{k+t}(k+t)\right)=-\nabla_y H_{k+t}\left(\bar{y}_{k-\Delta+t},\bar{y}_{k+t},\bar{u}_{k+t},y^*_{k+t+1}(k+t)\right)$$

при $t=\overline{\Delta+1,m-1-k}$.

Положив полученные выражения $x^*_t(t),x^*_t(t+\Delta),y^*_t(t)$ и $y^*_t(t+\Delta)$ в (4) имеем следующие соотношения:

$$x^*_t(t-1)-\nabla_{x_t}H_t\left(c(t-\Delta),\bar{x}_t,\bar{u}_t,x^*_{t+1}(t)\right)-\nabla_{x_t(t+\Delta)}H_t\left(\bar{x}_t(t+\Delta),\bar{x}_t,\bar{u}_t,x^*_{t+1}(t)\right)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$$

при $t=\overline{1,\Delta}$,

$$x^*_t(t-1)-\nabla_{x_t}H_t\left(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{u}_t,x^*_{t+1}(t)\right)-\nabla_{x_t(t+\Delta)}H_t\left(\bar{x}_t(t+\Delta),\bar{x}_t,\bar{u}_t,x^*_{t+1}(t)\right)\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$$

при $t=\overline{\Delta+1,k-\Delta-1}$,

$$x^*_{k-\Delta}(k-\Delta-1)-\nabla_{x_{k-\Delta}}H_{k-\Delta}\left(\bar{x}_{k-2\Delta},\bar{x}_{k-\Delta},\bar{u}_{k-\Delta},x^*_{k-\Delta+1}(k-\Delta)\right)-\nabla_{y_{k-\Delta}}H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\right.$$
$$\left.\bar{u}_k,y^*_{k+1}(t)\right)\circ G'(\bar{x}_{k-\Delta})\in\lambda\partial\varphi_{k-\Delta}(\bar{x}_{k-\Delta}),$$

$$x^*_t(t-1)-\nabla_{x_t}H_t\left(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{u}_t,x^*_{t+1}(t)\right)-\nabla_{y_t}H_{t+\Delta}\left(G(\bar{x}_{t+\Delta}),\bar{y}_{k+t},\bar{u}_{t+\Delta},y_{t+\Delta+1}(t+\Delta)\right)$$
$$\in\lambda\partial\varphi_t(\bar{x}_t)$$

при $t=\overline{k-\Delta+1,k-1}$,

$$x^*_k(k-1)-\nabla_{y_k}H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}),G(\bar{x}_k),\bar{u}_k,y^*_{k+1}(k)\right)\circ G'(\bar{x}_k)-\nabla_{y_k}H_{k+\Delta}\left(G(\bar{x}_k),\bar{y}_{k+\Delta},\bar{u}_{k+\Delta},\right. \quad (5)$$
$$\left.y^*_{k+\Delta+1}(k+\Delta)\right)\circ G'(\bar{x}_k)\in\lambda\partial\varphi_k(\bar{x}_k),$$

$$y^*_t(t-1)-\nabla_{\bar{y}_t}H_t\left(G(\bar{x}_{t-\Delta}),\bar{y}_t,\bar{u}_t,y^*_{t+1}(t)\right)-\nabla_{y_t}H_{t+\Delta}\left(\bar{y}_t,\bar{y}_{t+\Delta},\bar{u}_{t+\Delta},y^*_{t+\Delta+1}(t+\Delta)\right)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{x}_t)$$

при $t=\overline{k+1,k+\Delta}$,

$$y^*_t(t-1)-\nabla_{y_t}H_t\left(\bar{y}_{t-\Delta},\bar{y}_t,\bar{u}_t,y^*_{t+1}(t)\right)-\nabla_{\bar{y}_t}H_{t+\Delta}\left(\bar{y}_t,\bar{y}_{t+\Delta},\bar{u}_{t+\Delta},y^*_{t+\Delta+1}(t+\Delta)\right)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{x}_t)$$

при $t=\overline{k+\Delta+1,m-\Delta-1}$,

$$y^*_t(t-1)-\nabla_{y_t}H_t\left(\bar{y}_{t-\Delta},\bar{y}_t,\bar{u}_t,y^*_{t+1}(t)\right)\in\lambda\partial\psi_t(\bar{y}_t)$$

при $t=\overline{m-\Delta,m-1}$, $y^*_m(m-1)+y^*_m(m)\in\lambda\partial\psi_m(\bar{y}_m)$,

где $x^*_1(0)\in N_{a_0(c(-\Delta),c(0))}(\bar{x}_1)$, $y^*_m(m)\in N_C(\bar{y}_m)$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $X=R^n,Y=R^m,\left\{(\bar{u}_t,\bar{x}_t),(\bar{u}_\tau,\bar{y}_\tau):t=\overline{1,k},\tau=\overline{k+1,m}\right\}$ оптимальное решение в задаче (1), (2); удовлетворяется условие следствия 1 и предположим, что $gr\,a_t(c(-\Delta+t),\cdot)$ регулярный в точке $(\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ и $a_t(c(-\Delta+t),\bar{x}_t)$ выпуклое множество при $t=\overline{1,\Delta}$, $gr\,a_t$ регулярный в точке $(\bar{x}_{t-\Delta},\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1})$ и

$a_t(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{x}_t)$ выпуклое множество при $t=\overline{\Delta+1, k-1}$, $gr\, b_k(G(\cdot), G(\cdot))$ регулярный в точке $(\bar{x}_{k-\Delta}, \bar{x}_k, \bar{y}_{k+1})$ и $b_k(G(\bar{x}_{k-\Delta}), G(\bar{x}_k))$ выпуклое множество, $grb_t(G(\cdot), \cdot)$ регулярный в точке $(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$ и $b_t(G(\bar{x}_{t-\Delta}), \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$ выпуклое множество при $t=\overline{k+1, k+\Delta}$, $gr\, b_t$ регулярный в точке $(\bar{y}_{t-\Delta}, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$ и $b_t(\bar{y}_{t-\Delta}, \bar{y}_t, \bar{y}_{t+1})$ выпуклое множество при $t=\overline{k+\Delta+1, m-1}$, f_t дифференцируема по x_t при $t=\overline{1,\Delta}$, f_t дифференцируема по $(x_{t-\Delta}, x_t)$ при $t=\overline{\Delta+1, k-1}$, g_t дифференцируема по $(y_{t-\Delta}, y_t)$ при $t=\overline{k,m}$ и G дифференцируема по Фреше. Тогда существует решение системы (5) $x_t^*(t-1)$ при $t=\overline{1,k}$, $y_t^*(t-1)$ при $t=\overline{k+1, m-1}$, где λ равное нулю или -1, такие, что выполняются соотношения:

$$\sup\left\{H_t\left(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, u_t, x_{t+1}^*(t)\right): u_t \in U_t\right\} = H_t\left(c(-\Delta+t), \bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t)\right) \text{ при } t=\overline{1,\Delta},$$
$$\sup\left\{H_t\left(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{x}_t, u_t, x_{t+1}^*(t)\right): u_t \in U_t\right\} = H_t\left(\bar{x}_{t-\Delta}, \bar{x}_t, \bar{u}_t, x_{t+1}^*(t)\right) \text{ при } t=\overline{\Delta+1, k-1},$$
$$\sup\left\{H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}), G(\bar{x}_k), u_k, y_{k+1}^*(k)\right): u_k \in U_k\right\} = H_k\left(G(\bar{x}_{k-\Delta}), G(\bar{x}_k), \bar{u}_k, y_{k+1}^*(k)\right),$$
$$\sup\left\{H_t\left(G(\bar{x}_{t-\Delta}), \bar{y}_t, u_t, y_{t+1}^*(t)\right): u_t \in U_t\right\} = H_t\left(G(\bar{x}_{t-\Delta}), \bar{y}_t, \bar{u}_t, y_{t+1}^*(t)\right) \text{ при } t=\overline{k+1, k+\Delta},$$
$$\sup\left\{H_t\left(\bar{y}_{t=\Delta}, \bar{y}_t, u_t, y_{t+1}^*(t)\right): u_t \in U_t\right\} = H_t\left(\bar{y}_{t-\Delta}, \bar{y}_t, \bar{u}_t, y_{t+1}^*(t)\right) \text{ при } t=\overline{k+\Delta+1, m-1}.$$

Отметим, что можно положить $\nu(t-1)=x_t^*(t-1)$ при $t=\overline{1,k}$, $\nu(t-1)=y_t^*(t-1)$ при $t=\overline{k+1,m}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988, 280 с.
2. Магеррамов Ш.Ф. Условия оптимальности для одного класса дискретных задач оптимального управления. Автореферат. Баку, 2003, 21 с.
3. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988, 510 с.

DİSKRET ZAMANA NƏZƏRƏN GECİKƏN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİ

H.Q.MİRZƏYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə dəyişən strukturlu diskret zamana nəzərən gecikən optimal idarəetmə məsələlərinə baxılır. Hamar olmayan halda dəyişən strukturlu diskret sistemləri üçün zəruri ekstremum şərti alınmışdır.

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH DISCRETE TIME DELAY

H.G.MIRZAYEVA

SUMMARY

In this work the optimal control problems of variable structure with discrete time delay are considered. In the nonsmooth case the necessary extremum condition is obtained for discrete systems with variable structure.